PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA

MATEMATIKA TEKNIK

Oleh Dessy Irmawati

TERMINOLOGI DAN KLASIFIKASI

- Definisi (persamaan diferensial linear)

  Persamaan diferensial orde n dikatakan linear jika diwujudkan dalam bentuk:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.....+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \qquad (1)$$

$a_0(x)$,$a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ dengan ($a_n(x) \neq 0$) adalah koefisien. F(x) adalah fungsi dari x.

- jika ada sedikitnya satu koefisisen tidak konstan, maka persamaan disebut persamaan diferensial linear koefisien variabel.
- Sebalinya jika koefisien tersebut konstan, maka persamaan menjadi
- $$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \qquad (2)$$
- Disebut pers. Diferensial linear dengan koefisien konstan.

- Jika $f(X) = 0$ dalam persamaan (1) dan (2), maka kedua persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan homogen.
- Sebaliknya jika $f(x) \neq 0$, maka dikenal sebagai persamaan non homogen

- Dari definisi di atas, persamaan (1) direduksi ke orde pertama persamaan linear

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)$$

- Ketika n=2, maka persamaan menjadi

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2}+b(x)\frac{dy}{dx}+c(x)y=f(x)$$

- Yang mana persamaan linear tersebut adalah orde dua

contoh

1. Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan

   $$\frac{d^2y}{dx^2}+16y=0 \quad \text{dan} \quad y''-3y'+3y=e^x$$

   Persamaan pertama homogen dan persamaan kedua tidak homogen.

2. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ Dan $y'' - 3y' + 3y = e^x$

Persamaan pertama homogen dan persamaan kedua tidak homogen.

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \text{ dan } y'' + 4 + y' + 3y = 3\cos y$

adalah nonlinear karena ada y^2 di pers. pertama dan cos y di pers. kedua

Latihan

Tentukan setiap persamaan berikut linear atau tidak, jika linear apakah homogen dan mempunyai koefisien konstan?

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

(b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = \sin x$

(d) $y\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 5x^2$

(e) $\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$

(f) $\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} + xe^y = \cos x$

Definisi linear independen dan dependen

- Fungsi y_1, y_2, ..., y_n dikatakan indipenden linear jika

$$c_1 y_1 + c_1 y_2 + ... + c_n y_n = 0$$

- Dikatakan dependen linear jika paling sedikit c_1, c_2, ..., c_n tidak sama dengan nol

contoh

Tentukan fungsi di bawah ini independen linear

(a) $y_1 = x^2$ dan $y_2 = \cos x$

(b) $y_1 = \sin x$ dan $y_2 = 4 \sin x$

(c) $Y_1 = x$ dan $y_2 = x^2$

(d) $Y_1 = e^x$ dan $y_2 = -3e^x$

jawab

(a) $y_1 = x^2$ dan $y_2 = \cos x$.

persamaan $c_1 x^2 + c_2 \cos x = 0$

$c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ untuk semua x, sehingga $y_1 = x^2$ dan $y_2 = \cos x$ adalah fungsi independen linear

Teorema penyelesaian kombinasi linear

- Jika y_1 dan y_2 penyelesaian independen linear untuk persamaan diferensial

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

di mana a, b, dan c konstan, kemudian penyelesaian umum dari persamaan tersebut adalah (A dan B konstan)

$$y = Ay_1 + By_2$$

Pembuktian

- Y_1 da y_2 adalah dua penyelesaian linear indipenden dari persamaan diferensial homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

$$a\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1=0 \qquad (3)$$

Dan

$$a\frac{d^2y_2}{dx^2}+b\frac{dy_2}{dx}+cy_2=0 \qquad (4)$$

- Persamaan (3) dikalikan dengan A dan pers (4) dikalikan dengan (B) dan dijumlahkan menjadi

$$a\left(A\frac{d^2y_1}{dx^2}+B\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)+b\left(A\frac{dy_1}{dx}+B\frac{dy_2}{dx}\right)+c\left(Ay_1+By_2\right)=0$$

atau

$$a\frac{d^2}{dx^2}[Ay_1+By_2]+b\frac{d}{dx}\left(Ay_1+By_2\right)+c\left(Ay_1+By_2\right)=0$$

- Artinya

$$y = Ay_1 + By_2$$

Selama A dan B konstan, maka penyelesaian disebut sebagai penyelesaian umum.

Teorema (prinsip superposisi)

- Jika y1 dan y2 adalah penyelesaian indipenden linear

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

- Maka kombinasi linear

$$y = Ay_1 + By_2$$

Di mana A dan B adalah konstan dan juga meupakan penyelesaian persamaan diferensial yang diberikan

Teorema Prinsip superposisi secara umum

- Jika y1, y2, y3, ... , yn adalah penyelesaian indipenden linear

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

- Dimana c1, c2, c3 ,...., cn adalah konstan, yang merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial yang diberikan

contoh

Diberikan persamaan diferensial

$$y'' + 9y = 0$$

Tunjukkan:

(a) $y1 = \cos 3x$ dan $y2 = \sin 3x$ adalah penyelesaiannya

(b) $Y1 = \cos 3x$ dan $y2 = \sin 3x$ adalah independen linear

(c) $Y = A \cos 3x + B \sin 3x$, di mana A dan B adalah konstan adalah penyelesaian umum.